Branching rules and Hodge cycles

AUTHOR(S):

硲, 文夫

数理解析研究所講究録
634巻 1987年 271-277

Branching rules and Hodge cycles

東京電機大・理工 硲 文夫
(Fumio Hazama)

§0. 動機づけ.

もし, stably degenerateなアーベル多様体を少し統一的に見ようとするのなら, 以下に我々が考察しようとする"Al_{4n+2}型"のアーベル多様体は格好の題材を与えてくれると思われます。すなわち, それらは,

① すべての$n \geq 1$について実際に構成できる,

② すべての$n \geq 1$について, stably deg.,

③ Hodge cycleを原理的には計算できる,

というような利点をもっています。 ①, ②については, [H]を見ていただくとして, ③を少しだけ御紹介したいと思います。詳しくは, やはり[H]をごらん下さい。

§ 1. Branching rules

$\mathfrak{sl}_n$（以下すべて$\mathbb{C}$上の話）の既約表現が，Young図形でparametrizeされることは，よく知られています。しかし，その"代入"にあたる分岐則については，"すなおな"subalgebra以外には，統一的な結果がありません。もっとキチンと言うと，

(1.1) Def.

$\mathfrak{sl}_N$ の既約表現(μ)，$\mathfrak{sl}_n$の既約表現(λ)が与えられ，しかも(λ)の次数がNに等しいとすると，

$$\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{(\lambda)} \mathfrak{sl}_N \xrightarrow{(\mu)} \mathfrak{sl}_?$$

なる合成を考えることができる。それを$(\lambda)*(\mu)$と書き，(μ)の(λ)にかんするbranching rule，(λ)と(μ)のplethysmなどとよぶ。

たとえば$\mathfrak{sl}_n$の$\Lambda^m(\Lambda^l\mathbb{C}^n)$への自然な作用は，$(1^l)*(1^m)$と書かれるわけです。この§では，$(l)*(m)$の既約分解をrecursiveに計算することのできる公式を与えます。そのために，若干の記号を導入します。

(1.2) Def.

Young図形 $(\lambda) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ が depth m で degree ℓ とは 次の式をみたすことである:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > \lambda_{m+1} = \cdots = 0, \\ \sum \lambda_i = \ell \end{cases}$$

また，Young図形全体を基底とする自由アーベル群を Y と書く。

(1.3) Def.

Young図形 (λ) に対し，

$$[(\lambda)]_{\leq m} = \begin{cases} (\lambda) & \text{もし } \mathrm{depth}(\lambda) \leq m \text{ なら,} \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し，これを Y 全体に linear に拡張する。

(1.4) Def.

Young図形 (λ) に対し，

$$[(\lambda)]_a = \begin{cases} (\lambda_1 - 1, \cdots, \lambda_a - 1) & \mathrm{depth}(\lambda) = a \text{ のとき,} \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し，これを Y 全体に linear に拡張する。

（今まで，暗に，例えば（2，1，1）と（2，1，1，0）を同一視しています。）

さて，我々の公式は次のものです。

（1．5）

与えられた自然数 l，m，及び $1 \leq a \leq m$ なる a に対し，

$$[(l) * (m)]_a = \left[\sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{(l) * (m-a-i)\} \otimes \{(l-1) * (1^{a+i})\} \otimes (i)\right]_{\leq a}$$

$$[(l) * (1^m)]_a = \left[\sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{(l) * (1^{m-a-i})\} \otimes \{(l-1) * (a+i)\} \otimes (i)\right]_{\leq a}$$

これらの式を，depth $(l) * (m) \leq m$，degree $(l) * (m) = lm$ という事実といっしょに使えば，原理的には，いくらでも計算することができます。また，Young図形の転置（＝主対角線に関する折り返し）を T とかくと，

$$\{(\lambda) * (\mu)\}^T = \begin{cases} (\lambda)^T * (\mu)^T & \text{degree}(\lambda)\text{が奇} \\ (\lambda)^T * (\mu) & \text{degree}(\lambda)\text{が偶} \end{cases}$$

なる性質があるので，（1．5）とあわせれば，横か縦1列

のYoung図形のbranchingはみなわかることになります。ですから，例えば，よく知られた $(2)*(n)$ や $(n)*(2)$ の公式もかんたんに証明できます。また $[(2)*(1^n)]_1 = 0$ などという式もでてきます。

§2. Hodge cycleとの関係

§0.で述べた“$\mathfrak{sl}_{4n+2}$ 型”のアーベル多様体とは，次のようなものです：

(2.1) Th.

与えられた自然数 n に対し，次の性質をもつアーベル多様体 A_n が存在する：

① A_n は単純で，次元は $\binom{4n+2}{2n+1}/2$，

② A_n は虚数乗法をもたない，つまり，$\mathrm{End}\,A \cong \mathbb{Z}$，

③ $\mathcal{L}ie(Hg(A_n)_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{sl}_{4n+2}$，

④ $H^1(A_n, \mathbb{C}) \cong \Lambda^{2n+1}\mathbb{C}^{4n+2}$ （表現として）．

（ここに $Hg(A_n)$ は A_n のホッジ群）

そして，Hodge cycleはHodge群不変元として求められるので，例えば，A_1 について，Hodge予想を示そうとするのなら，

$$\dim[\Lambda^{2p}(\Lambda^3\mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1 \qquad (1 \leq p \leq 10)$$

を示せば十分です。しかも，hard Lefschetz により，"真中の" p が いちばん次元が大きいので，

$$\dim[\Lambda^{10}(\Lambda^3\mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1$$

を示せばよいことになります。つまり，$(1^3) * (1^{10})$ の分解の中に自明な表現は重複度 1 であらわれることをいえばよいわけです。そしてこれは §1 の公式で，"手で" 示すことができ，A_1 の Hodge 予想ができてしまいます。

さて，こうなると，A_2，A_3 としらべたくなるのが人情ですが，残念なことに（or 喜ぶべきことに），次の結果が出てしまいます：

(2.2) Prop.

$n \geq 4$ ならば

$$\dim[\Lambda^4(\Lambda^{2n+1}\mathbb{C}^{4n+2})]^{sl_{4n+2}} \geq 2$$

つまり，$n \geq 4$ のとき，A_n は divisor で生成されない Hodge cycle をすでに余次元 2 でもってしまいます。ただ，実は，純粋に branching を計算する立場でいえば，この命題より詳しく $(1^{2n+1}) * (1^4)$ における自明な表現の重複度を求めることもできるので，少

しは，§1の公式も役に立つことがあるのかもしれません。

参考文献；F. Hazama:

[H] Branching rules and Hodge cycles on certain abelian varieties, (to appear in Amer. J. Math.)